DEVOIR DE SYNTHESE N°3

4ème Math — Durée : 4h

EXERCICE N°1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A(-1,0,1) ; B(1,4,-1) et C(3,-4,-3).

1/ Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2/ a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que le plan (ABC) a pour équation $x + z = 0$.

3/ Soit la droite D : $\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 2-2\alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$.

a) Montrer que la droite D est sécante au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I.

4/ Soit K (4,0,4) et S la sphère de centre K et tangente au plan (ABC).

Déterminer une équation cartésienne de S.

EXERCICE N°2

Soit θ un paramètre appartenant à $[0, 2\pi]$ et E_θ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2\cos\theta\ z + 9 - 8\cos^2\theta = 0.$$

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E_θ.

On désignera par z' et z'' les solutions de E_θ.

2/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient M' et M" les points d'affixes z' et z'' et (E) l'ensemble des points M' et M" lorsque θ varie dans $[0, 2\pi]$.

a) Montrer que (E) est l'ellipse d'équation $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

b) Déterminer l'excentricité de (E), ainsi que les coordonnées des sommets et des foyers dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Tracer (E).

3/ Soit $M \in (E)$ et A le point de coordonnées (1,0).

Soit G le barycentre des points (A,1) et (M,2).

Montrer que lorsque M varie sur (E), G varie sur une ellipse (E') que l'on caractérisera.

EXERCICE N°3

Une urne contient trois boules blanches numérotées 1, 1, 1 ; deux boules noires numérotées 0, 1 et une boule rouge numérotée 0.

On tire une boule de l'urne : Si elle porte le numéro 0 on la remet dans l'urne puis on tire simultanément deux boules de l'urne et si elle porte le numéro 1, on la remet dans l'urne puis on tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1/ Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) A : « Avoir exactement deux boules portant le numéro 0 parmi les trois boules tirées de l'urne »

b) B : « Avoir trois boules blanches ».
c) Sachant qu'on a tiré trois boules de même numéro quelle est la probabilité pour que les trois boules portent le numéro zéro ?

2/ On note X l'aléa numérique égal au nombre de boules portant le numéro 1 tirées. Déterminer la loi de probabilité de X.

On note succès,l'évènement S : « Tirer trois boules marquées 1 ».

3/ On répète l'épreuve précédente trois fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.
Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E : « Avoir exactement 2 succès ».
F : « Avoir 2 succès successifs et deux seulement ».
G : « Avoir un succès pour la $1^{ère}$ fois au $3^{ième}$ tirage ».

EXERCICE N°4

Une maison d'édition a ouvert le 1^{er} janvier 2002, sur Internet, un site de vente par correspondance.
Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de livres vendus par mois en milliers.

Mois	Janvier 2002	Janvier 2003	Juillet 2003	Janvier 2004	Juillet 2004
Rang du mois x_i	1	13	19	25	28
Nombre de livres y_i	1,2	2,5	3,5	5,1	6

1/ Représenter le nuage de points (x_i, y_i) dans un repère (unités graphiques : 1 cm représente deux mois en abscisse et 1 cm représente 500 livres en ordonnée).

2/ L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel plutôt qu'un ajustement affine. Pour cela, on pose $z_i = \ln(y_i)$.
Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant où z_i est arrondi 10^{-3}

Rang du mois x_i	1	13	19	25	28
$z_i = \ln(y_i)$			1,253		

3/ Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine D de z en x par la méthode des moindres carrés.

4/ Déduire une relation entre y et x de la forme : $y = \alpha e^{kx}$.

5/ En supposant que l'évolution se poursuive de cette façon :
a) Donner une estimation à l'unité prés du nombre de livres qui seront vendus en janvier 2005.
b) A partir de quel mois peut-on prévoir que le nombre de livres vendus dépasse 13000 ?

EXERCICE N°5

$\boxed{\text{A}}$

Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = e^x(x-1)+1$.

1/ a) Etudier les variations de g et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On précisera la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D : y = x.
b) Montrer que la restriction h de g à $[0, +\infty[$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui même. Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de h^{-1}.

c) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' et les droites d'équations : x = 0 et x = 1.

2/ a) Montrer que l'équation : $x\,e^x - 1 = 0$ admet dans IR une solution unique α telle que $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.

b) En déduire que $\mathscr{C}$ admet une tangente unique Δ parallèle à D.

c) Déterminer une équation de Δ.

B

Pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$, on pose $I(x) = \int_0^x \frac{e^t (x-t)^2}{2}\,dt$

1/ Sans calculer $I(x)$, montrer que :

Pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$, on a : $0 \le I(x) \le \frac{x^3}{2} e^x$;

en déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{I(x)}{x^2}$.

2/ En faisant des intégrations par parties, montrer que :

$I(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.